第 42 講　無理数の証明

42　次の各問いに答えよ.

(1)　$\sqrt{7}$ が無理数であることを示せ.

(2)　$\log_3 5$ が無理数であることを示せ.

(3)　$\sqrt[3]{5}$ が無理数であることを示せ．また，$\sqrt[3]{5}$ は有理数係数の 2 次方程式の解になれないことを示せ.

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 42 講　無理数の証明

42　$\sqrt{2}+\sqrt{3}$ が無理数であることを証明せよ.

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 42 講　無理数の証明

42 次の各問いに答えよ．

(1) $\sqrt{7}$ が無理数であることを示せ．

(2) $\log_3 5$ が無理数であることを示せ．

(3) $\sqrt[3]{5}$ が無理数であることを示せ．また，$\sqrt[3]{5}$ は有理数係数の 2 次方程式の解になれないことを示せ．

【答】 略

【解答】

(1) $\sqrt{7}$ が有理数，つまり $\sqrt{7}=\dfrac{m}{l}$（ただし，l と m は互いに素な自然数）と仮定すると，

$\sqrt{7}=\dfrac{m}{l}$ より $\sqrt{7}\,l=m$ であるので，これを 2 乗して $7l^2=m^2$ を得る．

ここで，l は自然数より l^2 は整数，つまり $7l^2$ は 7 の倍数となる．

また整数 k を用いて

$$(7k)^2=7\cdot 7k^2$$
$$(7k\pm 1)^2=7(7k^2\pm 2k)+1$$
$$(7k\pm 2)^2=7(7k^2\pm 4k)+4$$
$$(7k\pm 3)^2=7(7k^2\pm 6k+1)+2$$

となるので，整数を 2 乗したものが 7 の倍数になるのは，その整数が 7 の倍数のときに限る．

よって $7l^2=m^2$ が 7 の倍数より，$m=7k$ と表せる．このとき $7l^2=m^2$ は $7l^2=49k^2$ つまり $l^2=7k^2$ となり，$7k^2$ は 7 の倍数であるので，同様に l は 7 の倍数．これは l と m が互いに素であることに矛盾する．

ゆえに $\sqrt{7}$ は有理数ではない．つまり無理数である．

(2) $\log_3 5$ が有理数，つまり $\log_3 5=\dfrac{m}{l}$（ただし，l と m は互いに素な自然数）と仮定すると，$3^{\frac{m}{l}}=5$ よりこれを l 乗して $3^m=5^l$ を得る．

ここで左辺は 3 だけを因数にもつ整数で右辺は 5 だけを因数にもつ整数であるので，これらが等しくなることはない．

よって $\log_3 5$ は有理数ではない．つまり無理数である．

(3) $\sqrt[3]{5}$ が有理数，つまり $\sqrt[3]{5}=\dfrac{m}{l}$（ただし，l と m は互いに素な自然数）と仮定すると，

$\sqrt[3]{5}=\dfrac{m}{l}$ より $\sqrt[3]{5}\,l=m$ であるので，これを 3 乗して $5l^3=m^3$ を得る．

ここで，l は自然数より l^3 は整数，つまり $5l^3$ は 5 の倍数となる．

また整数 k を用いて

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

$(5k)^3=5\cdot 25k^3$

$(5k\pm 1)^3=5(25k^3\pm 15k^2+3k)\pm 1$

$(5k\pm 2)^3=5(25k^3\pm 30k^2+12k\pm 1)\pm 3$

となるので，整数を3乗したものが5の倍数になるのは，その整数が5の倍数のときに限る．

よって $5l^3=m^3$ が5の倍数より，$m=5k$ と表せる．このとき $5l^3=m^3$ は $5l^3=125k^3$ つまり $l^3=25k^3$ となり，$25k^3$ は5の倍数であるので，同様に l は5の倍数．これは l と m が互いに素であることに矛盾する．

ゆえに $\sqrt[3]{5}$ は有理数ではない．つまり無理数である．

次に $\sqrt[3]{5}$ が p，q を有理数とする $x^2+px+q=0$ の解であると仮定すると，

$(\sqrt[3]{5})^2+p\sqrt[3]{5}+q=0$　……①　が成立する．

ここで $5=(\sqrt[3]{5})^3=(\sqrt[3]{5}-p)\{(\sqrt[3]{5})^2+p\sqrt[3]{5}+q\}+(p^2-q)\sqrt[3]{5}+pq$ となるが，①を用いると $5=(p^2-q)\sqrt[3]{5}+pq$ より $(p^2-q)\sqrt[3]{5}=5-pq$ となる．ここで $p^2-q\neq 0$ とすると $\sqrt[3]{5}=\dfrac{5-pq}{p^2-q}$ となるが，左辺は無理数，右辺は有理数であるので，矛盾．また，$p^2-q=0$ すなわち $q=p^2$ であるとすると，$5=pq=p\cdot p^2=p^3$ したがって $p=\sqrt[3]{5}$ となり p が有理数であることに矛盾する．

よって $\sqrt[3]{5}$ が有理数係数の2次方程式の解になることはない．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第42講　無理数の証明

42　$\sqrt{2}+\sqrt{3}$ が無理数であることを証明せよ.

【答】 略

【解答】

$\sqrt{2}+\sqrt{3}$ が有理数と仮定すると，ある有理数 α を用いて $\sqrt{2}+\sqrt{3}=\alpha$ と表せる．両辺を2乗して $5+2\sqrt{6}=\alpha^2$ より $\sqrt{6}=\dfrac{\alpha^2-5}{2}$

ここで右辺は有理数となり，$\sqrt{6}>0$ より右辺は $\dfrac{m}{l}$（ただし，l と m は互いに素な自然数）と表せる．

$\sqrt{6}=\dfrac{m}{l}$ より $\sqrt{6}\,l=m$ となるので，これを2乗して $6l^2=m^2$ を得る．

ここで，l は自然数より l^2 は整数，したがって $6l^2$ は偶数となる．

また整数 k を用いて

$$(2k)^2=2\cdot 2k^2,\quad (2k+1)^2=2(2k^2+2k)+1$$

となるので，整数を2乗したものが偶数になるのは，その整数が偶数のときに限る．

よって $6l^2=m^2$ が偶数より，$m=2k$ と表せる．このとき $6l^2=m^2$ は $6l^2=4k^2$ すなわち $3l^2=2k^2$ となり，$3l^2$ は3の倍数，$2k^2$ は偶数であり，2と3は互いに素であるので，この式は6の倍数つまり整数 M を用いて $6M$ と表せる．

よって $3l^2=6M$ より $l^2=2M$，l^2 は偶数となるので l は偶数．これは l と m が互いに素であることに矛盾する．

よって $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ は無理数である．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。